あるディリクレ級数について (解析的整数論の話題)

竹内, 文彦

数理解析研究所講究録
157巻 1972年 29-41

あるディリクレ級数について

近大　工学部　竹　内　文彦

§ 1

(§1では以降使用する原理並びに記号について説明する).

この小論に於て．我々は次の型の dirichlet serie を導入する

即ち $\prod_p f_n(p^{-s}) \qquad \prod_p g_n(p^{-s})$

但し $f_n(t) = T_r\left[\begin{pmatrix} 1+t & t \\ t & t \end{pmatrix}^n\right] \qquad g_n(t) = f_n(-t)$

その意味．動機については§2以降説明する

(i) D を C 上 commutative-semi-simple algebra で

$D = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}/C$ とすれば.

D 内には. primitive idempotent $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$

が存在して. $\omega_i \cdot \omega_j = \delta_{ij}\omega_i$ を満足している.

又 $$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_j \quad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

φ を D から C への C 上 linear map とする.

又 $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,n}$ とおけば (A を仮に pr. id matrix という)

$$A\left(\varphi(x_i\, x_j)\right)A' = \left(\varphi(\omega_i\, \omega_j)\right) = \begin{pmatrix} \varphi(\omega_1) & & & O \\ & \varphi(\omega_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \varphi(\omega_n) \end{pmatrix}$$

となる.

(ii) C 上の com. s.s. algebra F, G, を (ii) に於て定義し

これを fix する.

N を任意の自然数とし

$I = \{1, 2, 3, 5, 6, \cdots\ n\}$

を N 以下の平方因子を含まない全体とする

又 $\#(I) = \nu$ とおく.

そのとき

$$H = \{x_i\}/C \quad i \in I \qquad x_i \cdot x_j = x_{(i,j)} \quad i,j \in I$$

と定義する（ (i,j) は i,j の最大公約数）

その時 H の pr. idempotent $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ は

$$\omega_i = \sum^{d|i} \mu(d)\, x_{\frac{i}{d}} \qquad i \in I$$

H の pr. id. matrix を A とし $A^{-1} = B$ とおけば

$$B = (b_{ij})_{i,j \in I} \quad \text{は} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & j|i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\left(\because \sum^{d|i} \omega_d = x_i\right)$$

又 $$G = \{x_i\}/C \quad i \in I \qquad x_i \cdot x_j = \begin{cases} x_{\{i,j\}} & \{i,j\} \leq N \\ 0 & \{i,j\} > N \end{cases}$$

（$\{i,j\}$ は i,j の最小公倍数）

と定義する

その時 G の pr. idempotent $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ は

$$\omega_i = \sum^{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right) x_d \qquad i, d \in I$$

G の pr. id. matix を A_1, $A_1^{-1} = B_1$ とおけば

$$B_1 = (b_{ij}) \quad i, j \in I \quad は \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & ij \\ 0 & sonst \end{cases}$$

も容易に分る又.

$$B = B_1'$$

今

$$J = \begin{pmatrix} \mu(1) & & & & O \\ & \mu(2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mu(i) & \\ O & & & & \ddots \\ & & & & \mu(n) \end{pmatrix} \quad i \in I$$

とおけば

$$JBJ = B^{-1} = A \quad 従って JB_1J = A_1$$

も容易に分る.

(iii) この section に於ては2つの型の行列を問題にする.

まず p_i を i 番目の素数とする.

これから問題にする2つの型の行列を仮に α)型, β)型 という

α)型; $K = (k_{ij}) \quad i, j \in I$ の type の行列

又 $L = \{1, 2, 3, 5, 6, \cdots\}$

をすべての平方因子を含まぬ数の集合とすれば、

必要に応じて K を (k_{ij}) $i, j \in L$ $k_{ij} = \begin{cases} k_{ij} & (i,j) \in I \times I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

で定義される無限行列と identify する。

β) 型 $K_1 = (k_{ij})$ $i, j \in L_1$ の type の行列

但し $L_1 = \{1, 2, 3, 6, 5, 10, 15 \cdots\} = \{1, p_1, p_2, p_1 p_2, \cdots\}$

つまり $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p_4 \end{pmatrix} \otimes \cdots\cdots$

において、対角成分に並んだ順序に並べたものが

L_1 である。(又順序を無視すれば) L の元と L_1 の元とは

一致する。

次に α) 型行列 K と β) 型行列 K_1

とがあたえられたとする

我々は K と K_1 とが互いに対応するというのを次のようにして定義する.

今 K を前ページの注意の如く無限行列とみなす.

K の行と列とを適当に入れ換えれば β)型行列 になる.

それが K_1 と一致するとき K_1 と K とは互いに対応するといい. $\overset{(\alpha)}{K} \approx \overset{(\beta)}{K_1}$ とかく.

又. $i \in L_1$ 即ち $i \in L$ とする.よって $i = p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_m} \ (\mu(i) \neq 0)$

β)型行列 $\beta(i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \cdots$

を下の如く定義する。すなわち

$\beta(i)$ は2次の行列の無限個の Kronecker-product で

$j_1, j_2, \cdots, j_m$ 番目の因子は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ でその他の因子は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

[例 $i = 3\cdot 5 = 15$ とする $\beta(i) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\otimes \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \otimes \cdots\cdots$ （4番目以後の因子はすべて $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$）]

此処で§1 (ii) の記号と (i), (ii) の原理とを使えば.

prop 1.
$$B_1 \begin{pmatrix} \varphi(\omega_1) & & & \\ & \varphi(\omega_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\omega_n) \end{pmatrix} B_1' \approx \sum_{i \in I} \varphi(\omega_i)\beta(i)$$
(α) (β)

が容易に分る。

§2

prop 2 $f_n(t) = T_r\left[\begin{pmatrix} 1+t & t \\ t & t \end{pmatrix}^n\right]$ とおく. その時

$$f_n(t) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{\eta:\ \eta^n+1=0\ \eta+\eta^{-1}\text{が異なる値をとる}\frac{n}{2}\text{個をうごく}} \left(1+(2-\eta-\eta^{-1})t+4t^2\right) & n:\text{偶数} \\ \left(\displaystyle\prod_{\substack{\eta:\ \eta^n+1=0\ \eta+\eta^{-1}\text{が異なる値をとる}\frac{n-1}{2}\text{個をうごく} \\ \eta\neq -1}} \left(1+(2-\eta-\eta^{-1})t+4t^2\right)\right) \times (1+2t) & n:\text{奇数} \end{cases}$$

$\because)$ $\begin{pmatrix} 1+t & t \\ t & t \end{pmatrix}$ の eigen value を $\gamma(t), \delta(t)$ とする.

そのとき $f_n(t) = \gamma(t)^n + \delta(t)^n$ である.

今 t_0 を $f_n(t)$ の任意の根とする. $\gamma(t_0)^n+\delta(t_0)^n=0$

$\therefore \left(\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)}\right)^n+1=0$ (1) 又 $\gamma(t_0)+\delta(t_0)=1+t_0+t_0=1+2t_0$

$\gamma(t_0)\delta(t_0)=(1+t_0)t_0-t_0^2=t_0$

$$\therefore \frac{(\gamma(t_0)+\delta(t_0))^2}{\gamma(t_0)\delta(t_0)}=\frac{\gamma(t_0)^2+2\gamma(t_0)\delta(t_0)+\delta(t_0)^2}{\gamma(t_0)\delta(t_0)}$$

$$=\frac{\gamma(t_0)}{\delta(t_0)}+\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)}+2=\frac{(1+2t_0)^2}{t_0}=\frac{1}{t_0}+4+4t_0 \quad (2)$$

(1) から $\left(\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)}\right)^n+1=0$ よって次の2つのcaseを考える.

(イ) $\left\{\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)}=-1\right\}$ のとき.

(2) より $0=\frac{1}{t_0}+4+4t_0$ $t_0=-2$

(ロ) $\frac{\delta(t_0)}{\gamma(t_0)}=\eta\neq-1$ のとき

(2) より $4t_0+(2-\eta-\eta^{-1})t_0+1=0$

後は t_0 の任意性と $f_n(t)$ の次数を調べればよい Q.E.D.

$f_n(t)$ はすべて絶対値が $\frac{1}{2}$ の根をもっている．

又高々 $-\frac{1}{2}$ を除いて．あとはすべて虚根であることも．

prop 2 より明らかである

$$\left(f_1(t) = 1+2t \ , \ f_2(t) = 1+(2-i^{-1}-i)\,t+4t^2 \ , \ \cdots\cdots \right)$$
$$= 1+2t+4t^2$$

§3

このsectionに於ては§1(ii)の記号と§1 (i) (ii) (iii) の結果を断りなしに使う．

次に

$$W = B_1' B_1 \qquad Z = B_1' J B_1 = (z_{ij})_{(i,j)\in I\times I} \quad z_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j)=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

とおいて $\rho(W^{-1})$ $\rho(Z^{-1})$ を考察する（$\rho(U)$ は U の spectral-radius）

$$W^{-1} = B_1^{-1} B_1'^{-1} = J B_1 B_1' J \overset{\text{equivalent}}{\sim} B_1 B_1'$$

$$\overset{\text{equ.}}{\sim} B_1' B_1 = W$$

$$\therefore \rho(W^{-1}) = \rho(W) \cdots\cdots (1)$$

$$\rho(W)^2 < \mathrm{Tr}(W^2) \cdots\cdots (2)$$

(1) (2) より $\rho(W^{-1}) = O(N)$ が分る

次に $$Z^{-1} = JB_1^{-1}JB_1'J \overset{equ}{\sim} B_1JB_1'$$

$$\therefore \rho(Z^{-1}) = \rho(B_1JB_1')$$

又 prop1 より $$B_1\overset{(\alpha)}{J}B_1' \approx \sum_{i\in I} \mu(i)\overset{(\beta)}{\beta(i)}$$

次にすぐ分る如く

$$\sum_{i=1}^{N} a_i M\left(\frac{N}{i}\right) = \sum_{i=1}^{N} b_i \quad \left(但し \sum_{l\mid i} b_l = a_i\right) \cdots (3)$$

(3)より $$\sum_{(x,d)=1\ d\leq N} M\left(\frac{N}{d}\right) = \sum_{d\mid x\ d\leq N} \mu(d) \cdots\cdots (4)$$

(4) に於て x に I を全て動かせば

$$Z\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad i \in I \qquad \cdots (5)$$

$\Big(i = p_{j_1} p_{j_2} \cdots p_{j_\ell}$ としたとき $M_i = \displaystyle\sum_{\alpha_1 > 0,\, \alpha_2 > 0 \cdots \alpha_\ell > 0} M\Big(\frac{N}{p_{j_1}^{\alpha_1} p_{j_2}^{\alpha_2} \cdots p_{j_\ell}^{\alpha_\ell}}\Big)$

と定義する$\Big)$

(5) から Z^{-1} の第1列目が分るが、それと10ページに於る

Z^{-1} の形と§1 (iii) を使えば Z^{-1} の全成分が分る.

即ち $JZ^{-1}J = (S_{ij})$ $\quad i,j \in I \quad S_{ij} = \begin{cases} M_{\{i,j\}} \times \mu(\{i,j\}) & \{i,j\} \le N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\cdots (6)$

(6) と $\mathrm{Tr}((Z^{-1})^2) > (\rho(Z^{-1}))^2$ $\quad (\rho(Z^{-1}))^2 > Z^{-2}$ の(1.1)成分

$\qquad \| $

$\quad \mathrm{Tr}((JZ^{-1}J)^2)$

より $\rho(Z^{-1})$ の評価と $M(N)$ の評価とは同値である.

§4

さて $\overset{(\alpha)}{K} \approx \overset{(\beta)}{K_1}$ であれば

$$\mathrm{Tr}(K^{\ell}) = \mathrm{Tr}(K_1^{\ell}) \qquad \ell = 1, 2, 3, \cdots \qquad (1)$$

である.

又 $\gamma_1 = 1 \quad \gamma_m \cdot \gamma_n = \gamma_{mn} \ (m, n) = 1 \quad m, n \in L_1$ であれば

$\sum_{i \in L_1} \gamma_i \beta(i)$ は形式的に

$$\begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_1} & \gamma_{p_1} \\ \gamma_{p_1} & \gamma_{p_1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_2} & \gamma_{p_2} \\ \gamma_{p_2} & \gamma_{p_2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_3} & \gamma_{p_3} \\ \gamma_{p_3} & \gamma_{p_3} \end{pmatrix} \otimes \cdots$$

$$= \bigotimes_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1+\gamma_{p_i} & \gamma_{p_i} \\ \gamma_{p_i} & \gamma_{p_i} \end{pmatrix} \quad \text{とかける} \qquad (2)$$

又1般に Dirichlet-series $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^s}$ において

仮に $\psi^{(m)} = \sum_{n=1}^{m} d_n$ と定義する.

以下アイデアを簡単に述べれば

$\rho(Z^{-1})$ を評価したい訳であるがその為には.

$\mathrm{Tr}\left[(Z^{-1})^{\ell}\right]$ を評価すればよい.

然るに10ページより

$$J \overset{(\alpha)}{Z^{-1}} J \approx \sum_{i \in I}^{(\beta)} \mu(i)\,\beta(i)$$

よって (1) より $\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{i \in I} \mu(i)\,\beta(i)\right)^{\ell}\right]$ を評価すれば $\cdots (3)$

より．

そこで (3) 式を $\psi_{\ell}^{(n)}$ で代用しょうという訳で

ある．但し

$$\psi_{\ell}(s) = \mathrm{Tr}\left[\bigotimes_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s} \\ -\frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s} \end{pmatrix}\right]^{\ell}$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s} \\ -\frac{1}{p_i^s} & -\frac{1}{p_i^s} \end{pmatrix}\right]^{\ell} = \prod_{p_i} g_{\ell}(p_i^{-s})$$

但し n は §1 (iii) で定義した n．(2ページの下から3行目)

$\psi_{\ell}(s)$ 等については全然調べてない [$f_{\ell}\left(\frac{t}{2}\right) = h_{\ell}(t)$, $h_{\ell}(-t) = k_{\ell}(t)$ とおいて $k_{\ell}(t)$, $h_{\ell}(t)$ についても dirichlet series が def される]

– 後は別の機会に述べることにすることにしてこの小論を

終りたいと思います

参考文献

M. Hall. Jr Combinatorial theory